

---

# Maintenir et traiter toutes les sources de propagation unitaire dans les solveurs exacts pour Max-SAT

---

André Abramé et Djamel Habet

Aix Marseille Université, CNRS, ENSAM, Université de Toulon,  
LSIS UMR 7296, 13397, Marseille, France  
{andre.abrame,djamal.habet}@lsis.org

## Résumé

Dans le cadre de la résolution de Max-SAT par les solveurs de type *séparation et évaluation*, nous introduisons un nouveau schéma de propagation unitaire qui prend en compte toutes les sources de propagation des variables. Nous montrons que ce schéma est plus adapté au contexte de Max-SAT et donnons un exemple de l'usage qui peut être fait des informations disponibles dans ce schéma. Ce travail a été publié à la conférence SoCS 2014 [1].

## Abstract

In the context of Max-SAT solving by branch and bound algorithms, we introduce a new unit propagation scheme which considers all the propagation sources of the variables. We show that it is more relevant in the Max-SAT context and give an example of exploitation of the information that it contains. This work has been published at the SoCS 2014 conference [1].

## 1 Introduction

Le problème Max-SAT consiste à trouver une interprétation qui maximise (minimise) le nombre de clauses satisfaites (falsifiées) d'une formule en forme normale conjonctive (CNF). Parmi les méthodes dédiées à la résolution de Max-SAT, les algorithmes de type *séparation et évaluation* (S&E) ont montré leur efficacité sur les instances aléatoires et *crafted*. Ces algorithmes [4] explorent l'ensemble de l'espace de recherche en construisant un arbre de recherche. A chaque nœud de l'arbre, ils comparent la meilleure solution trouvée jusqu'à présent (la borne supérieure, BS) à une estimation de la meilleure solution atteignable dans la branche courante de l'arbre (la borne

inférieure, BI). Si  $BI \leq BS$  alors ils effectuent un *retour-arrière*, sinon ils sélectionnent une variable non affectée et fixent sa valeur. L'un des composants principaux des algorithmes S&E est l'estimation de la BI : elle est consommatrice en temps de calcul et influe fortement sur le nombre de nœuds explorés [4].

Le calcul de la BI consiste à réaliser une sous-estimation du nombre de sous-ensembles inconsistants (SI) disjoints à chaque nœud de l'arbre. Les SI sont détectés grâce à la propagation unitaire puis traités pour assurer leur caractère disjoint. Les traitements existants (suppression temporaire ou transformation par max-résolution [2, 3]) suppriment de la formule les clauses du SI pour la durée du calcul de la BI.

À notre connaissance, les implémentations existantes de la propagation unitaire, pour SAT et Max-SAT, se basent sur le schéma de la *première source de propagation* (PSP) : elles ne considèrent que la première clause unitaire (la source de propagation) ayant causé la propagation d'une variable donnée. Les autres sources de propagation sont alors satisfaites et donc ignorées. Dans ce schéma de propagation, lorsqu'une propagation est défaite (i.e. la variable correspondante est désaffectée), alors toutes les propagations qu'elle a engendrées doivent également être défaites pour pouvoir prendre en compte les autres sources de propagation précédemment ignorées. Ce schéma convient dans le cadre de SAT car les propagations ne sont défaites que lors des retours-arrières (et donc dans l'ordre chronologique inverse). Dans le cadre de Max-SAT, certaines clauses peuvent être supprimées lors du traitement des SI. Dans ce cas, les propagations engendrées par ces clauses doivent être défaites même si elles sont toujours valides (i.e. elles possèdent d'autres sources de

propagation). Cela peut conduire à défaire puis refaire inutilement les mêmes étapes de propagation unitaire.

## 2 Des sources multiples de propagation

Pour améliorer PSP, nous avons proposé un nouveau schéma de propagation que nous appelons *sources multiples de propagation* (SMP) [1]. Dans ce schéma, toutes les sources de propagation des variables sont considérées. Les variables propagées ne sont défaites que lorsqu'elles n'ont plus aucune source de propagation. Ainsi, les propagations peuvent être défaites dans un ordre non chronologique tout en limitant la redondance dans l'application de la propagation unitaire.

Dans ce nouveau schéma, nous modélisons les étapes de propagation par un *graphe d'implications plein* qui est un graphe ET/OU orienté. Les nœuds ET sont les clauses sources de propagation tandis que les nœuds OU sont les variables propagées [1]. Un tel graphe peut contenir des cycles. Pour éviter cela, nous attribuons à chaque variable propagée un niveau. La valeur de ce niveau est la longueur du plus long chemin (en nombre de nœuds) entre les nœuds racines du graphe et le nœud correspondant à la variable propagée. Ainsi, si une clause source à un niveau<sup>1</sup> supérieur à la variable qu'elle propage alors elle est ignorée car elle peut participer à l'apparition d'un cycle dans le graphe ET/OU.

Le schéma SMP peut aussi fournir des informations sur la structure de l'instance traitée, qui sont indisponibles dans le schéma PSP. Ces informations peuvent être exploitées notamment dans la construction des SI, selon des caractéristiques souhaitées, en choisissant les sources de propagation appropriées. Dans cette perspective, nous avons proposé une heuristique de choix de la source de propagation qui tente de minimiser la taille des SI, pour laisser le plus de clauses possibles disponibles aux propagations unitaires ultérieures [1]. Cela peut améliorer l'estimation de la BI et réduire ainsi le nombre de nœuds explorés. Cette heuristique, que nous appelons *petit ensemble inconsistant* (PEI), fonctionne comme suit : pour chaque variable propagée qui participe à un conflit (prise dans l'ordre inverse des propagations dans le graphe d'implications), PEI sélectionne la source de propagation qui contient le moins de nouvelles variables (à ajouter à celles figurant déjà dans le SI).

## 3 Étude expérimentale

Le schéma de propagation SMP est un composant central de notre solveur AHMAXSAT. En effet, une partie importante du code et des structures de données de

1. Le niveau d'une clause est le niveau maximum des variables qu'elle contient

AHMAXSAT dépendent fortement de ce schéma. Une implémentation efficace du schéma classique (PSP) dans AHMAXSAT nécessiterait une réécriture importante de son code. Pour ces raisons, nous évaluons l'impact de SMP sur le comportement de notre solveur de deux manières : (1) une évaluation de la part des propagations économisées grâce à SMP et (2) une comparaison de l'heuristique PSI à celle utilisée dans PSP.

L'étude est effectuée sur les instances aléatoires et *crafted* de *Max-SAT Evaluation 2013* avec un temps limite de 1800 secondes par instance. Les résultats obtenus montrent une réduction de 24% des étapes de propagation. Cette réduction varie entre 2.4% et 58% selon la classe d'instances considérée. Ce résultat est significatif au regard de l'importance des propagations unitaires dans les solveurs S&E.

Enfin, nous avons comparé l'impact de l'heuristique PSI à deux heuristiques basiques pour la construction des SI. La première choisit la première source de propagation disponible tandis que la deuxième sélectionne une source aléatoirement parmi celles construites. Les résultats obtenus montrent que l'heuristique PEI réduit le temps de calcul moyen de 10% environ.

## 4 Conclusion et perspectives

Nous avons introduit un nouveau schéma de propagation qui considère toutes les clauses causant la propagation des variables. Nous avons montré expérimentalement que ce nouveau schéma est plus approprié aux solveurs S&E pour Max-SAT. Nous avons illustré aussi une exploitation des informations contenues dans ce schéma afin d'influer sur les caractéristiques des ensembles inconsistants produits lors du calcul de la BI.

Nous pensons que l'intérêt de ce schéma dépasse le cadre de Max-SAT. Nous étudierons son usage dans les solveurs SAT complets tout en améliorant son utilisation pour Max-SAT.

## Références

- [1] A. Abramé and D. Habet. Maintaining and handling all unit propagation reasons in exact max-sat solvers. In *SOCS 2014*, pages 2–9, 2014.
- [2] ML. Bonet, J. Levy, and F. Manyà. Resolution for max-sat. *Artificial Intelligence*, 171(8-9) :606–618, 2007.
- [3] J. Larrosa and F. Heras. Resolution in max-sat and its relation to local consistency in weighted csps. In *IJCAI 2005*, pages 193–198, 2005.
- [4] CM. Li, F. Manyà, and J. Planes. New inference rules for max-sat. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 30 :321–359, 2007.