

Application efficace de la résolution pour Max-SAT sur les ensembles inconsistants

André Abramé et Djamal Habet

Aix Marseille Université, CNRS, ENSAM, Université de Toulon,
LSIS UMR 7296, 13397, Marseille, France
{andre.abrame,djamal.habet}@lsis.org

Résumé

L'application de la max-résolution dans les méthodes séparation et évaluation pour Max-SAT augmente le nombre de clauses de la formule initiale. Nous définissons un nouvel ordre d'application de cette règle qui vise à mieux contrôler cet inconvénient. Ce papier a été publié à la conférence CP 2014 [1].

Abstract

The application of the max-resolution rule in branch and bound solvers for Max-SAT increases the number of clauses in the formula. We introduce a new order of application of this rule to limit this drawback. This paper have been published in CP 2014 [1].

1 Introduction

Le problème Max-SAT consiste à trouver une interprétation qui maximise (minimise) le nombre de clauses satisfaites (falsifiées) d'une formule en forme normale conjonctive (CNF). Parmi les méthodes dédiées à la résolution de Max-SAT, les algorithmes de type *séparation et évaluation* ont montré leur efficacité sur les instances aléatoires et *crafted*. Un tel algorithme pour Max-SAT [4] explore l'ensemble de l'espace de recherche par un arbre de recherche. A chacun de ses nœuds, l'algorithme compare la meilleure solution déjà trouvée (la borne supérieure, BS) à une estimation de la meilleure solution atteignable sur la branche courante de l'arbre de recherche (la borne inférieure, BI). Si $BI \leq BS$ alors il est effectuée un *retour-arrière*, sinon il sélectionne une variable non affectée (libre) et fixe sa valeur. L'un des composants importants d'un tel algorithme est l'estimation de la BI car elle est consommatrice en temps de calcul et influe fortement sur le nombre de nœuds explorés.

Le calcul de la BI consiste à réaliser une sous-estimation du nombre de sous-ensembles inconsistants (SI) disjoints à chaque nœud de l'arbre. Les SI sont détectés grâce à la propagation unitaire. Les étapes de propagation sont représentées par un graphe d'implications $G = (V, A)$ qui est orienté et acyclique. Les nœuds V représentent les littéraux propagés et les arcs A lient les causes des propagations (les littéraux falsifiés dans les clauses unitaires) à leurs conséquences (les littéraux propagés). Quand un conflit est détecté par la falsification de tous les littéraux d'une clause, un SI peut être construit en analysant la séquence de propagations qu'il l'a produit. Les SI sont alors traités pour assurer leur disjonctivité. L'un des traitements existants consiste à transformer les SI par la règle de la max-résolution suivante [2, 3] :

$$\frac{c_i = \{x, y_1, \dots, y_s\}, c_j = \{\bar{x}, z_1, \dots, z_t\}}{cr = \{y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_t\}, cc_1, \dots, cc_t, cc_{t+1}, \dots, cc_{t+s}}$$

c_i et c_j sont les clauses originelles, cr la résolvente et les clauses de compensation suivantes préservent l'équivalence de la formule : $cc_1 = \{x, y_1, \dots, y_s, \bar{z}_1, z_2, \dots, z_t\}$, $cc_2 = \{x, y_1, \dots, y_s, \bar{z}_2, z_3, \dots, z_t\}$, \dots , $cc_t = \{x, y_1, \dots, y_s, \bar{z}_t\}$, $cc_{t+1} = \{\bar{x}, z_1, \dots, z_t, \bar{y}_1, y_2, \dots, y_s\}$, $cc_{t+2} = \{\bar{x}, z_1, \dots, z_t, \bar{y}_2, y_3, \dots, y_s\}$, \dots , $cc_{t+s} = \{\bar{x}, z_1, \dots, z_t, \bar{y}_s\}$

Un SI est transformé en appliquant cette règle sur ses clauses. Aussi, la règle de la max-résolution est appliqués dans l'ordre inverse des propagations car elle ne peut s'appliquer sur un littéral que s'il réduit une seule clause (ou que les clauses qu'il réduit sont agrégées dans une seule résolvente). Enfin, la transformation d'un SI par cette règle produit des clauses de compensation qui peuvent augmenter rapidement la taille de la formule traitée.

2 Heuristique de la plus petite résolvente

Nous avons observé que le nombre et la taille des clauses de compensation varient selon l'ordre d'application de la règle de la max-résolution. Plus particulièrement, nous avons montré que pour deux variables adjacentes dans un graphe d'implications, l'application de cette règle sur la variable qui induit la plus petite résolvente produit toujours moins de clauses de compensation, qui sont aussi de plus petites tailles [1]. Sur cette base, nous avons proposé dans l'algorithme 1 une heuristique simple pour définir l'ordre de l'application de la règle de la max-résolution. Premièrement, le score de chaque variable $x \in \text{var}(V)$ ¹ (ligne 2) est calculé comme suit : si x réduit une seule clause alors $\text{score}(x)$ est la taille de la résolvente intermédiaire, sinon $\text{score}(x) = \infty$. Deuxièmement, il sélectionne la variable avec le plus petit score (ligne 4) et applique la max-résolution entre son prédécesseur et son successeur (lignes 5-7). Il met alors à jour le graphe d'implications G (lignes 8) en remplaçant les clauses consommées par la résolvente intermédiaire (les arcs dupliqués sont supprimés) puis les scores des variables sont aussi mis à jour (ligne 9). Ce processus est répété tant que le graphe d'implications mis à jour n'est pas vide. La dernière résolvente produite est alors ajoutée à la formule. Nous appelons cette méthode l'heuristique de la plus petite résolvente intermédiaire (PRI).

Algorithme 1 : Transformation d'un SI par Max-SAT résolution selon l'heuristique PRI

Data : Une formule CNF Φ , une affectation I falsifiant une clause et le graphe d'implications correspondant $G = (V, E)$.

Result : La formule Φ transformée

```

1 begin
2   for  $x \in V$  do calculer le score de  $x$ ;
3   while  $|V| > 0$  do
4      $l \leftarrow$  le littéral, tel que  $\text{var}(l)$  a le plus petit score
      dans  $V$ ;
5      $c_1 \leftarrow$  prédécesseur de  $\text{var}(l)$ ;
6      $c_2 \leftarrow$  successeur de  $\text{var}(l)$ ;
7      $cr \leftarrow \text{max\_sat\_resolution}(\Phi, c_1, x, c_2)$ ;
8      $G \leftarrow G_{<\text{var}(l)>}$ ;
9     Mettre à jour les scores des variables apparaissant
      dans  $c_1$  et  $c_2$ ;
10   $\Phi = \Phi \cup \{cr\}$ ;

```

3 Étude expérimentale

Nous avons implémenté l'heuristique PRI dans notre solveur de type séparation et évaluation AHMAXSAT. Dans la suite, AHMAXSAT désigne la variante utilisant l'ordre classique de l'application de la max-résolution et AHMAXSAT⁺ correspond à celle utilisant PRI. Nous

1. $\text{var}(V)$ (resp. $\text{var}(l)$) est l'ensemble des variables qui apparaissent dans V (resp. la variable concernée par l).

avons testé les deux variantes sur les instances aléatoires et *crafted* de la Max-Evaluation 2013, avec une limite de temps à 1800 secondes par instance. Les résultats obtenus montrent que AHMAXSAT⁺ résout 3 instances de plus avec un gain de temps de 19% en moyenne. Le nombre et la taille des clauses de compensation sont significativement réduits (respectivement de 22% et 20% en moyenne). Par conséquent, l'estimation de la BI faite par AHMAXSAT⁺ est plus précise et moins de nœuds sont développés.

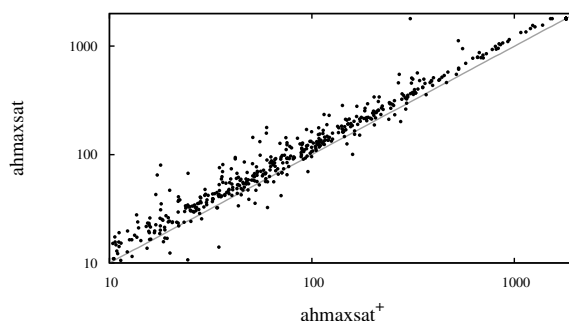


FIGURE 1 – Comparaison des temps de résolution (en secondes) d'AHMAXSAT et d'AHMAXSAT⁺. Les axes sont en échelle logarithmique.

La Fig. 1 compare instance par instance les temps de résolution des deux variantes d'AHMAXSAT. Elle confirme l'observation précédente tout en indiquant que le gain est visible sur une la majorité du benchmark et qu'il n'est pas restreint à peu d'instances.

4 Conclusion

Nous avons introduit un nouvel ordre d'application de la règle de la max-résolution qui limite significativement l'augmentation de la taille de la formule. En perspective, nous étudierons l'impact de cette règle sur les autres caractéristique de la formule comme les propriétés de la propagation unitaire.

Références

- [1] André Abramé and Djamel Habet. Efficient application of max-sat resolution on inconsistent subsets. In *CP 2015*, pages 92–107, 2014.
- [2] María Luisa Bonet, Jordi Levy, and Felip Manyà. Resolution for max-sat. *Artificial Intelligence*, 171(8-9):606–618, 2007.
- [3] Javier Larrosa and Federico Heras. Resolution in max-sat and its relation to local consistency in weighted cps. In *IJCAI 2005*, pages 193–198, 2005.
- [4] Chu Min Li, Felip Manyà, and Jordi Planes. New inference rules for max-sat. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 30:321–359, 2007.